Ответы и решения задач «красного» уровня сложности MathCat

Задача 1. (6 баллов) Ежик, Барсук и Заяц бегают вокруг опушки. Причем Ежик и Заяц по часовой стрелке, а Барсук – против часовой стрелки. Скорость Зайца в три раза больше скорости Ежика. Барсук встречает Ежика каждые шесть минут, а Зайца – каждые четыре минуты. Как часто встречаются Ежик и Заяц, если скорости всех зверей постоянны? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 720 секунд

Решение: Обозначим скорость Ежика за Е, скорость Барсука за Б, скорость зайца за З. По условию, Ежик и Барсук проходят полный круг за шесть минут, а Барсук и Заяц за четыре минуты, тогда $6(Е+Б)=4(Б+З)=4(Б+3Е)$, раскрыв скобки получим $6Е+6Б=4Б+12Е$, значит $Б=3Е$. Так как Ежик и Барсук проходят круг за шесть минут, то Ежик пробежит круг за 24 минуты, а скорость, с которой Заяц догоняет Ежика, в два раза больше собственной скорости Ежика. Значит, Заяц догоняет Ежика раз в 12 минут, или 720 секунд.

Задача 2. (6 баллов) На острове живут только рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Однажды собралась компания, в которой присутствовали как те, так и другие. Каждого кроме Пети спросили: "Сколько среди вас рыцарей?". Было получено семнадцать ответов «16», двадцать ответов «21», двадцать один ответ «22». А что мог бы ответить Петя на такой же вопрос?

Ответ: 21, 22, 1

Решение: По условию должен быть хотя бы один рыцарь. Если единственным рыцарем является Петя, то он скажет «1». В противном случае есть хотя бы один рыцарь среди ответивших на вопрос, и, значит, прозвучал правильный ответ. Заметим, что все рыцари отвечают всегда на вопрос одинаково, а все ответившие на вопрос правильно должны быть рыцарями. Если правильный ответ «16», то рыцарей всего должно быть 16, но все группы одинаковых ответов содержат больше 16 человек. Если правильный ответ «21», то те 20 человек кто ответили «21» являются рыцарями, и среди отвечавших на вопрос других рыцарей нет, значит оставшийся рыцарь Петя, и он ответил «21». Если правильным ответом является «22», то 21 человек ответивший «22» являются рыцарями и оставшимся рыцарем должен быть Петя. В этом случае он ответит «22».

Задача 3. (9 баллов) Двое продавцов выставили одинаковую цену на товар. После этого каждый день первый продавец или увеличивал цену на 586%, или уменьшал ее на 2%, а второй увеличивал каждый день либо на 124%, либо на 243%. Через какое наименьшее количество дней могло оказаться так, что у них снова одинаковые цены?

Ответ: 5

Решение: Пусть первый продавец x раз увеличивал цену на 586% и y раз уменьшал на 2%, а второй a раз увеличивал на 124%, и b раз увеличивал на 243%.

Тогда изменения цены первого это $(686/100)^x\cdot(98/100)^y$, а изменения цены второго $(224/100)^a\cdot(343/100)^b$. Заметим, что $x+y=a+b$, а, значит, от знаменателя 100 можно везде избавиться. Тогда $686^a\cdot98^b=224^x\cdot343^y$. Разложим числа на простые множители, тогда $(2\cdot7^3)^a\cdot(2\cdot7^2)^b=(2^5\cdot7)^x\cdot(7^3)^y$. Приравняв количество семерок и двоек с каждой стороны, получим систему уравнений:

$a+b=x+y$,
$3a+2b=x+3y$,
$a+b=5x$

Выразив все через x, получим $a=3x$, $y=4x$, $b=2x$. Тогда минимальная сумма $a+b=x+y=5$.

Задача 4. (9 баллов) Оля по очереди закрашивает клетки таблицы 5×8. Закрасив какую-нибудь клетку, она записывает на бумажку сумму количеств пустых клеток в строке и в столбце с закрашенной. Какой может быть сумма всех выписанных ею чисел, когда всё поле будет закрашено?

Ответ: 220

Решение: Каждое из чисел, выписанных Олей, можно разложить в сумму двух - количества пустых клеток в столбце и количества пустых клеток в строке. Рассмотрим только количества пустых по строкам. В каждой строке для первой закрашенной клетки будет выписано число 4, для второй число 3 и т.д. Значит, сумма таких чисел в каждой строке это 0+1+2+3+4=10. Аналогично сумма в каждом столбце 0+1+2+...+7=28. Значит, общая сумма всех чисел это 28*5+10*8=220.

Задача 5. (9 баллов) В ряд стоят 16 коробочек с конфетами, каждая из которых красная или синяя. Из каждой красной переложили по конфете во все синие, стоящие правее нее, а из каждой синей – во все красные, которые правее нее. В результате в синих коробочках стало на 60 конфет больше. Сколько могло быть красных коробочек?

Ответ: 6,8,10

Решение: Каждая пара разноцветных коробочек ровно один раз участвовала в перекладывании. Пусть было a перекладываний из синих в красные, и b перекладываний из красных в синие, тогда b-a=60. Если красных коробочек x, то синих 16-x, а, значит, количество пар разноцветных коробочек равно $16x-x^2$, и это равно сумме всех перекладываний, а значит, $a+b=16x-x^2$. Если x меньше 6 или больше 10, то $16x-x^2<60$, а значит, и количество конфет в синих коробочках не могло вырасти на 60. Кроме того, красных коробочек не могло быть нечетное число, потому что иначе $a+b=16x-x^2$ число нечетное, а значит, и a-b число нечетное, но 60 четное. Значит возможные ответы это 6,8 и 10. На каждый из них есть пример.

Пример на 6: ККККККСССССССССС

Пример на 8: КККККККСКССССССС

Пример на 10: ККККККККККСССССС

Задача 6. (10 баллов) В трапеции QPRS основание QS в три раза больше основания PR. Точка X лежит на PR, точка Y – середина QP. Площадь трапеции равна 64, а суммарная площадь серых частей равна 8. Найдите площадь черного куска. (См. рис. 1)

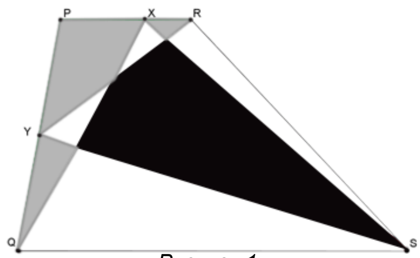


Рисунок 1

Ответ: 24

Решение: Пусть высота трапеции равна h, а PR=x. Тогда площадь трапеции равна S=h(QS+PR)/2=4hx/2=2hx. Площадь треугольника QSX=h(3x)/2=(3/4)S. Сумма площадей треугольников QSY и YPR равна QS·h/2+PR·h/2=(h/2)(4x/2)=(½)S, а значит и площадь треугольника RYS=(½)S. Тогда сумма площадей треугольников QSX и RYS равна (½)S+(3/4)S=(5/4)S, то есть на (1/4)S больше чем площадь трапеции. Заметим, что черная часть – это часть “покрытая” треугольниками QSX и RYS дважды, а серая – это не покрытая вообще. Значит разница площадями черной и серых частей тоже составляет (1/4)S=16, тогда площадь черной части равна 8+16=24.

Задача 7. (10 баллов) Числа x, y, z удовлетворяют системе уравнений:

$x^2+4y^2+5z^2=118$,
$xz+yz=11$,
$x+2y+3z=18$.
Найдите значение 4y-x.

Ответ: 9

Решение: Умножив вторую строку на 4 и прибавив к первой получим $x^2+4xz+4z^2+z^2+4zy+4y^2=162$, что тоже самое, что $(x+2z)^2+(2y+z)^2=162$. Сделав замены x+2z=a и 2y+z=b получим $a^2+b^2=162$ и a+b=18. Отсюда можно выразить $2ab=(a+b)^2-a^2-b^2=162$. Откуда $(a-b)^2=a^2+b^2-2ab=0$, следовательно, a=b=9, а 4y-x=2b-a=9.

Задача 8. (12 баллов) На картинке в качестве примера изображено шестиугольное поле 3×4. Где-то на шестиугольном поле 12×14 спрятался кораблик 1×2. За какое наименьшее количество выстрелов можно гарантированно попасть в него хотя бы один раз? Каждый выстрел попадает ровно в одну шестиугольную ячейку на этом поле. (См. рис. 2)

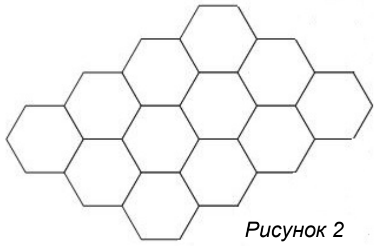
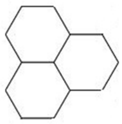
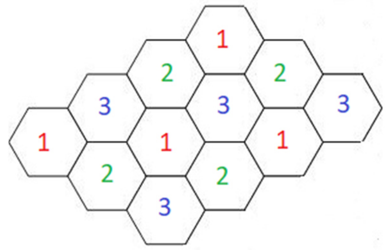


Рисунок 2

Ответ: 126



Решение: В каждом таком “треугольнике” должно быть подбито хотя бы две клетки, иначе две неподбитых клетки образуют кораблик 1×2. Параллелограмм 12×14 разрезается на параллелограммы 2×3, а значит и на указанные “треугольники”. Значит, всего нужно хотя бы 126 клеток. Пример на 126 получается если в такой раскраске выстрелить во все клетки любых двух цветов.



Задача 9. (14 баллов) На передней грани куба со стороной 100 сидит паук. Его координаты относительно правой верхней вершины: 2 влево, 7 вниз. На верхней грани сидит муха. Её координаты относительно той же вершины: 4 влево, 8 вперёд. Найдите квадрат длины кратчайшего пути от паука до мухи по поверхности параллелепипеда.

Ответ: 221.

Решение: Заметим, что кратчайший путь должен представлять собой отрезок прямой на развёртке куба. Необходимо сравнить длины двух возможных путей паука: первый через ребро между передней и верхней гранью, а второй через правую грань (длина любого пути выходящего за пределы трех этих граней заведомо хотя бы 100). В случае если паук ползет через ребро, развернем верхнюю и переднюю грани в одну плоскость, в этой плоскости путь паука должен быть отрезком. Длину такого пути можно рассчитать по теореме Пифагора, разница координат будет 2 и 15, а значит длина пути $\sqrt{225+4}=\sqrt{229}$. В случае же, если паук ползет по правой грани, развернем грани нашего куба в плоскость правой. Тогда в этой плоскости путь паука должен быть отрезком. Его длину тоже можно узнать по теореме Пифагора, разница координат между пауком и мухой составляет 11 и 10, а значит длина $\sqrt{121+100}=\sqrt{221}$

Задача 10. (15 баллов) В магазине продаются открытки. Все открытки представлены в 5 разных цветах, с 7 разными надписями и с 9 разными картинками (в наличии имеются открытки с любым сочетанием указанных трёх признаков). Какое максимальное количество открыток можно купить так, чтобы среди них не было двух одинаковых и не было двух, у которых совпадает ровно 1 признак?

Ответ: $5+7+9-6=15$

Решение: Будем решать задачу в общем случае. Пусть открытки бывают n цветов, с m надписями и k картинками. Сопоставим каждой открытке трехзначный код, где первая цифра от 1 до m соответствует цвету, вторая от 1 до n и соответствует надписи, а третья от 1 до k и соответствует картинке. Любые две открытки отличаются либо в одном, либо сразу в трех параметрах.

Рассмотрим любые две открытки, отличающиеся ровно в одном параметре. Тогда любая другая открытка или отличается от них в том же параметре, или во всех трех сразу. Действительно, пусть наши открытки имеют вид abx и aby, тогда любая другая открытка, если в первых двух разрядах у нее стоит не ab, отличается хотя бы от одной из abx и aby хотя бы в двух разрядах, но так как открытки не могут отличаться в ровно двух разрядах, то она отличается во всех трех.

Таким образом, все открытки делятся на 4 группы: (1) множество открыток, каждая из которых отличается от всех остальных во всех разрядах (2) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только цветом (3) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только надписью (4) множество открыток, отличающихся хоть с какой-то другой только картинкой.

Заметим, что каждая открытка из первой группы запрещает всем остальным занимать один цвет, одну надпись и одну картинку. Мысленно удалим эти открытки и уменьшим на их количество соответственно m, n и k.

Пусть теперь нашлись две открытки abx и aby в максимальном наборе совпавшие в каких-то двух разрядах. Тогда ни одна другая открытка из набора уже не может оканчиваться ни на x ни на y. Действительно, если она оканчивается на x, то у нее должно быть или a на первом месте или b на втором, но тогда она совпадает с aby ровно по одному признаку.

Пусть теперь в группе (4) найдется хотя бы k-1 открыток. Значит, у всех остальных открыток одинаковая картинка, и, следовательно, они совпадают в одних и тех же двух разрядах. Тогда всего оставшихся открыток не больше чем максимум из m-1 и k-1, а всего в нашем наборе их не более k-1+max(n-1;m-1). Аналогично по остальным параметрам, если в группе (2) хотя бы n-2, то всего открыток не более чем n-1+max(m-1;k-1), и если в группе (3) хотя бы m-2, то m-1+max(n-1;k-1). Подставив данные из нашей задачи, получим что тогда всего не более 14 открыток.

Если же открыток отличающихся по каждому из параметров не больше чем x-2, где x - количество вариантов этого параметра, то всего открыток не больше чем m+n+k-6=15. На это число есть пример.

111 112 113 114 115 116 117 228 238 248 258 268
379 479 579